Semplici applicazioni della legge di gravitazione universale

1. Dimostrazione della terza legge di Keplero

Johannes von Kepler (Keplero) ricavò le sue tre famose leggi su base empirica, cioè analizzando le numerose e precise misurazioni raccolte da Tycho Brahe. In seguito, Isaac Newton diede una giustificazione teorica a tutti i moti degli astri e quindi tutte e tre le leggi di Keplero sono ricavabili dalla:

legge di gravitazione universale $$F_{gr} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad (1)$$

Dedurremo la terza legge di Keplero dalla (1) nel caso in cui $m_1 = m_p$ è la massa di un pianeta e $m_2 = M_s$ è quella del Sole ed ***r*** è il raggio dell'orbita del pianeta. Stiamo facendo due supposizioni:

a) che il pianeta si muova su di un'orbita circolare (il raggio è costante);

b) che il centro di massa del sistema coincida con il centro del Sole.

Entrambe queste semplificazioni sono accettabili per le orbite planetarie che hanno un'eccentricità molto piccola ($e \cong 0$) e considerato che la massa del Sole è molto più grande di quella dei pianeti ($M_s \gg m_p$).

In base alla 2ª legge della dinamica, la forza gravitazionale F_{gr} agente sul pianeta di massa m_p ne determina l'accelerazione centripeta a_c, che lo mantiene in orbita, quindi: $$F_{gr} = m_p \cdot a_c \qquad (2)$$

Eguagliando i secondi membri delle due equazioni (1) e (2) si ha: $$m_p \cdot a_c = G\frac{m_p \cdot M_s}{r^2} \qquad (3)$$

che possiamo semplificare dividendo entrambi i membri per m_p $$a_c = G\frac{M_s}{r^2} \qquad (4)$$

ricordando che $a_c = \frac{v^2}{r}$ e $v = \frac{2\pi r}{\tau}$ [1], possiamo scrivere: $$a_c = \frac{4\pi^2 r}{\tau^2} \qquad (5)$$

combinando la (4) e la (5) otteniamo: $$\frac{4\pi^2 r}{\tau^2} = G\frac{M_s}{r^2} \qquad (6)$$

effettuando opportuni spostamenti tra i due membri della (6): $$\frac{4\pi^2}{G \cdot M_s} = \frac{\tau^2}{r^3} \qquad (7)$$

Per i pianeti orbitanti attorno al Sole, tutti i fattori al primo membro della (7) sono costanti, per cui possiamo scrivere: $$\frac{\tau^2}{r^3} = k \qquad (8)$$

Quest'ultima è, in effetti, la terza legge di Keplero.

> **Terza legge di Keplero** – I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali al cubo delle loro distanze medie dal Sole

[1] τ è il periodo di rivoluzione, ossia il tempo impiegato a percorrere un'orbita intera.

2. Calcolo della massa del Sole

Notiamo che nell'equazione (7) ricavata in precedenza, la massa del pianeta non compare.

Quindi, con opportuni spostamenti si ottiene: $$M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{G\tau^2}$$

cioè, la massa del Sole è ricavabile conoscendo il raggio ed il periodo di rivoluzione di un pianeta.

Poiché $\frac{\tau^2}{r^3} = k$ e quindi $\frac{r^3}{\tau^2} = \frac{1}{k}$, possiamo anche scrivere: $$M_s = \frac{4\pi^2}{G\,k_s}$$

in cui con k_s intendiamo specificare che la costante vale solo per il Sistema Solare.

Un analogo ragionamento si può fare per calcolare la massa di qualsiasi corpo celeste che possieda un satellite del quale si conoscano raggio e periodo di rivoluzione.

Per esempio, nel caso del sistema costituito da Giove e dai suoi satelliti si ha: $$M_{Giove} = \frac{4\pi^2}{G\,k_{Giove}}$$

3. Calcolo della densità della Terra

Grazie alla legge di gravitazione universale è possibile calcolare con buona approssimazione la densità media della litosfera terrestre conoscendone il raggio medio $r \cong 6380\ \text{km} \equiv 6{,}38 \cdot 10^6\ \text{m}$ ed il valore dell'accelerazione di gravità al livello del mare $g \cong 9{,}81\ \text{m/sec}^2$.

La massa M_T della Terra si ricava considerando la forza esercitata su di un corpo di massa m in caduta libera in vicinanza della superficie terrestre:

$$F_{gr} = G\frac{m \cdot M_T}{r^2}$$
$$F_{gr} = mg$$

dalle quali, eguagliando i secondi membri si ottiene: $$mg = G\frac{m \cdot M_T}{r^2}$$

che possiamo semplificare dividendo entrambi i membri per m: $$g = G\frac{M_T}{r^2}$$

e quindi, con opportuni spostamenti: $$M_T = \frac{gr^2}{G} = \frac{9{,}81 \cdot (6{,}38 \cdot 10^6)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}} = 5{,}99 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

Approssimando la Terra ad una sfera: $$V_T = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (6{,}38 \cdot 10^6)^3 = 1{,}09 \cdot 10^{21}\ \text{m}^3$$

La densità è il rapporto M/V, quindi: $$d_T = \frac{M_T}{V_T} = \frac{5{,}99 \cdot 10^{24}}{1{,}09 \cdot 10^{21}} = 5{,}50 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 \equiv 5{,}50\ \text{kg/dm}^3$$

Ricordando che la densità dell'acqua è 1 kg/dm^3 e la densità media delle rocce superficiali è di circa 2,7 kg/dm^3, il risultato ottenuto si spiega solo ipotizzando che l'interno della Terra abbia una densità molto più alta. Tale ipotesi è compatibile con altre prove che suggeriscono la presenza nella Terra di un nucleo formato di una lega di ferro-nichel.