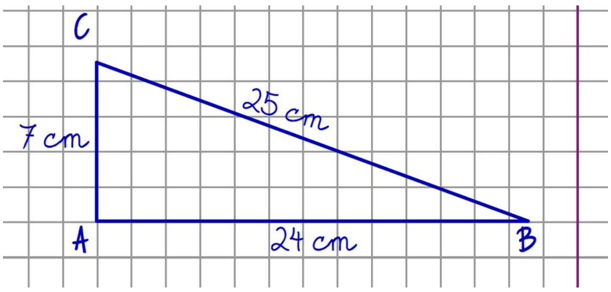
Otto problemi di riepilogo sulle aree dei poligoni – soluzioni guidate

PROBLEMA 1)

In un triangolo rettangolo ABC, l'angolo retto è $\hat{A}$, i tre lati AB, BC e AC misurano 7, 25 e 24 cm.

a) Disegna la figura.



Commento al disegno

È sempre opportuno disegnare una figura geometrica nel rispetto dei dati. In questo caso sono fornite le lunghezze dei tre lati ed è quindi possibile disegnare il triangolo rispettando la proporzione tra i lati e quindi la forma.

Le dimensioni reali della figura sono troppo grandi, occuperebbero quasi tutto il foglio, anche considerando 1 quadretto = 1 centimetro, la figura è ancora molto grande.

Ho ottenuto una riduzione soddisfacente dimezzando i valori e prendendo come unità 1 quadretto ***(q)***:

$AB = 12\ \boldsymbol{q}$; $BC = 12{,}5\ \boldsymbol{q}$; $AC = 3{,}5\ \boldsymbol{q}$

b) Calcola l'area del triangolo.

DATI

$\hat{A} = 90°$

$AB = 24\ cm$

$BC = 25\ cm$

$AC = 7\ cm$

$A_{ABC} = ?$

Commento ai dati

$\hat{A} = 90°$ è un dato che spesso si dimentica perché il numero 90 non è scritto nel testo della richiesta. In casi come questi si dice che il dato è implicito.
$\hat{A} = 90°$ non è necessario al calcolo dell'area, ma senza questa informazione non saprei che il triangolo è rettangolo e quindi non potrei calcolare facilmente l'area usando la formula:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

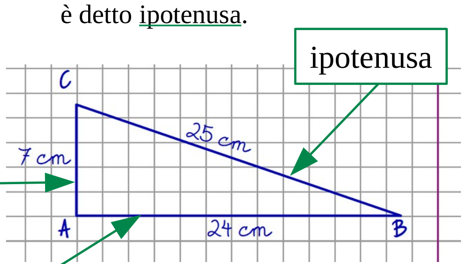
SVOLGIMENTO

$$A_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\cancel{24} \cdot 7}{\cancel{2}} = \frac{12 \cdot 7}{1} = 84\,cm^2$$

Commento allo svolgimento

In un triangolo rettangolo i due lati perpendicolari, adiacenti all'angolo retto, sono detti cateti e sono quelli di dimensioni minori.

Il lato maggiore è sempre il lato opposto all'angolo retto che è detto ipotenusa.



cateto minore

cateto maggiore

Nel triangolo rettangolo, se consideriamo un cateto come base, l'altro cateto è la sua altezza relativa

Rifletto

Quando si opera con frazioni, bisogna sempre prima ridurre i termini (se possibile) e poi moltiplicare;

in questo caso posso ridurre i termini dividendo per due il fattore 24 e il denominatore 2.

Il dato BC = 25 cm NON mi è servito al calcolo dell'area.

PROBLEMA 2)

Ci sono due quadrati: il primo ha l'area di 36 cm², il secondo ha l'area di 40 cm².

Calcola il perimetro di ciascuno dei due quadrati.

DATI

$A_1 = 36\ cm^2$

$A_2 = 40\ cm^2$

$p_1 = ?$

$p_2 = ?$

SVOLGIMENTO

$$\ell_1 = \sqrt{A_1} = \sqrt{36} = 6\,cm$$

$$\ell_2 = \sqrt{A_2} = \sqrt{40} \approx 6{,}32\,cm$$

$$p_1 = 4\,\ell_1 = 6 \cdot 4 = 24\,cm$$

$$p_2 = 4\,\ell_2 = 6{,}3246 \cdot 4 \approx 25{,}30\,cm$$

$$\begin{array}{r} 6{,}3246\ \times \\ 4\ = \\ \hline 25{,}2984 \end{array}$$

Commento allo svolgimento

In questo problema sono necessari **due passaggi**:

1) **calcolo** i lati ℓ applicando la formula inversa del dell'area di un quadrato
2) **calcolo** i perimetri $p = 4\ell$

Rifletto

Il numero **36** è un quadrato perfetto quindi la sua radice posso scriverla esattamente.

Il numero **40** NON è un quadrato perfetto quindi la sua radice posso scriverla solo in forma approssimata;

il risultato fornito dalle tavole è 6,3246 tuttavia due cifre decimali forniscono un'approssimazione già molto buona, non ne servono di più;

infatti 6,32 *cm* significa 6 *cm* + 3 *mm* + 2 decimi di millimetro, nelle situazioni più comuni non serve essere più precisi.

Nel calcolo del p_2 ho usato il numero completo ottenuto dalle tavole e non la sua approssimazione;

il risultato ottenuto nel calcolo in colonna l'ho approssimato per eccesso;

infatti 25,2984 è più vicino a 25,3000 rispetto a 25,2900;

se avessi usato il valore $l_2 \simeq 6{,}32\ cm$ avrei ottenuto un $p_2 \simeq 25{,}28\ cm$;

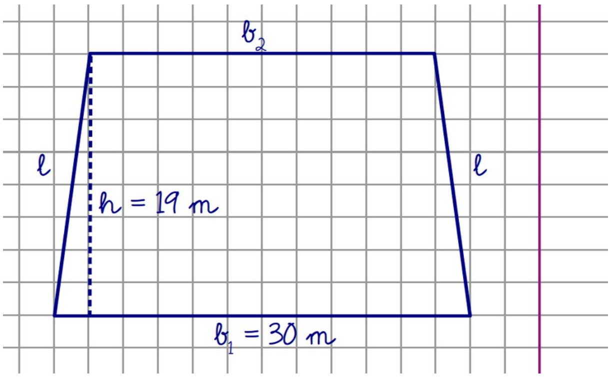
conviene sempre approssimare solo sul risultato finale.

Se ho bisogno di svolgere un calcolo in colonna, lo faccio sul quaderno con ordine.

PROBLEMA 3)

In un trapezio isoscele l’altezza misura 19 m, una base misura 30 m ed è i 6/5 dell'altra.

a) Disegna la figura.



Commento al disegno

Nel disegno di un poligono, l’elemento più importante da riportare correttamente è la giusta proporzione dei lati

Se una base è i 6/5 dell’altra allora l’altra è l’intero cioè 5/5 e quindi la prima base è la maggiore

Potrei disegnare la base maggiore lunga 6 quadretti e quella minore 5 quadretti, ma siccome il trapezio è isoscele, dovrei lasciare uno spazio di mezzo quadretto a destra e a sinistra della base minore, preferisco raddoppiare le misure e quindi

$b_1 = 12\ \boldsymbol{q}$ $b_2 = 10\ \boldsymbol{q}$ $h = 8\ \boldsymbol{q}$

$h = 8\ \boldsymbol{q}$ è un’approssimazione, infatti 19/20 è molto vicino a 20/30 cioè l’altezza è circa i due terzi della base maggiore

ricordiamo che i dati non sempre consentono di disegnare esattamente la figura

b) Calcola l’area del trapezio.

DATI

$$b_1 = \frac{6}{5} b_2$$

$$b_1 = 30\, m$$

$$h = 19\, m$$

$$A_{trap} = ?$$

SVOLGIMENTO

$$b_2 = \frac{5}{5}$$

$$UF\left(\frac{1}{5}\right) = 30 : 6 = 5\, m$$

$$b_2\left(\frac{5}{5}\right) = 5 \cdot 5 = 25\, m$$

$$A_{trap} = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2} = \frac{(30 + 25) \cdot 19}{2} = \frac{55 \cdot 19}{2} = \frac{1045}{2} = 522{,}5\, m^2$$

Commento allo svolgimento

In questo problema sono necessari **due passaggi**:

1) determinare la misura della base minore b_1;

2) calcolare l’area.

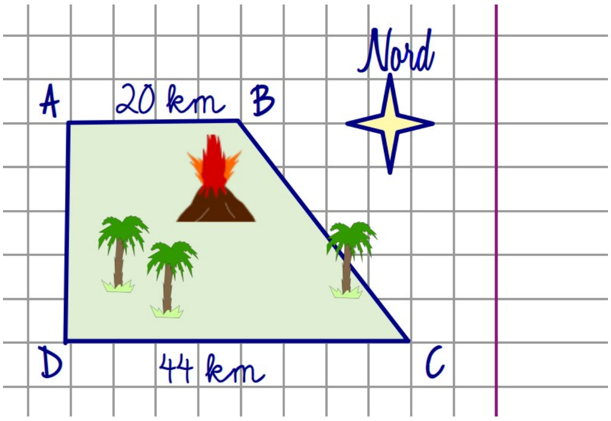
Se ho bisogno di svolgere un calcolo in colonna, lo faccio sul quaderno con ordine.

$$\begin{array}{r} 55\ \times \\ 19\ = \\ \hline 495\ + \\ 55/\ = \\ \hline 1045 \end{array}$$

PROBLEMA 4)

Un’isola ha la forma di un trapezio rettangolo. La superficie dell’isola è di 1728 km². La costa nord e quella sud sono parallele e rettilinee: la prima è lunga 20 km e la seconda 44 km.

Calcola la distanza tra le due coste.



Commento al disegno

Il disegno non è richiesto in questo problema, tuttavia il disegno mi è utile a visualizzare i dati e mi aiuta nella soluzione.

Rifletto:

- in un trapezio solo le basi sono lati paralleli;
- quindi costa nord e costa sud sono rispettivamente base minore e maggiore del trapezio;
- la distanza tra le basi è il segmento perpendicolare alle basi e quindi il lato AD.

DATI

$A_{trap} = 1728 \ km^2$

$AB = 20 \ km$ (costa Nord)

$CD = 44 \ km$ (costa Sud)

$AB \mathbin{/\!/} CD$

$AD = ?$ (distanza tra le coste N e S)

Commento ai dati

Il simbolo // significa “parallelo a…”

Commento allo svolgimento

SVOLGIMENTO

$$A_{trap} = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} \rightarrow AD = \frac{2\,A_{trap}}{(AB + CD)}$$

In un trapezio rettangolo il lato perpendicolare alle basi coincide con l’altezza.

Dalla formula per determinare l’area del trapezio, ricavo la formula inversa: determino l’altezza date l’area e le basi.

$$CD = \frac{2\,A_{trap}}{(AB + CD)} = \frac{2 \cdot 1728}{(20 + 44)} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 1728}{\cancel{64}_{32}} =$$

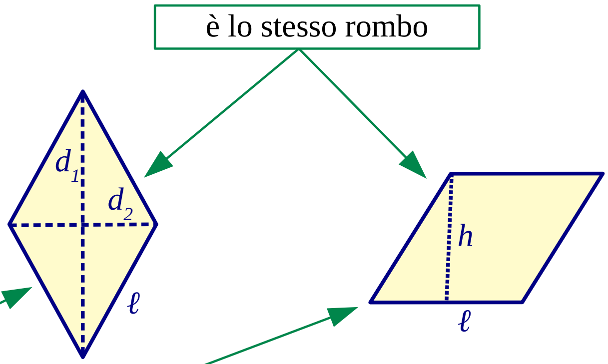
$$= \frac{\cancel{1728}}{\cancel{32}_8} = \frac{\cancel{432}}{\cancel{8}} = \frac{108}{2} = 54 \ km$$

Quando è possibile, bisogna sempre dividere prima di moltiplicare, semplificando l’espressione

PROBLEMA 5)

Un rombo ha il perimetro di 24 cm e le diagonali lunghe 9,6 cm e 7,2 cm.

Calcola la misura dell'altezza del rombo.



DATI

$p = 24\ cm$

$d_1 = 9{,}6\ cm$

$d_2 = 7{,}2\ cm$

$h = ?$

SVOLGIMENTO

$$A_{rombo} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$A_{rombo} = \ell \cdot h$$

Commento allo svolgimento

Il rombo ha le diagonali perpendicolari e l'area di può calcolare dalle diagonali.

Il rombo è anche un parallelogramma e quindi l'area si può calcolare avendo il lato e l'altezza.

Per risolvere il problema sono necessari **tre passaggi**:

1) **applico** la prima formula direttamente **e calcolo** l'area dalle diagonali;
2) **calcolo** il lato ℓ dal perimetro;
3) **applico** la seconda formula all'inverso **e calcolo** l'altezza del rombo

$$A = \frac{9{,}6 \cdot 7{,}2}{2} = 9{,}6 \cdot 3{,}6 = 34{,}56\, cm^2$$

$$\ell = \frac{p}{4} = \frac{24}{4} = 6\, cm$$

$$A_{rombo} = \ell \cdot h \rightarrow h = \frac{A}{\ell}$$

$$h = \frac{A}{\ell} = \frac{\cancel{34{,}56}}{\cancel{6}} = \frac{11{,}52}{2} = 5{,}76\, cm$$

$$\begin{array}{r} 9{,}6 \times \\ 3{,}6 = \\ \hline 576 + \\ 288/ = \\ \hline 34{,}56 \end{array}$$

Se ho bisogno di svolgere un calcolo in colonna, lo faccio sul quaderno con ordine.

Rifletto:

le divisioni scritte come frazioni rendono evidente la possibilità di ridurre i termini (se possibile);

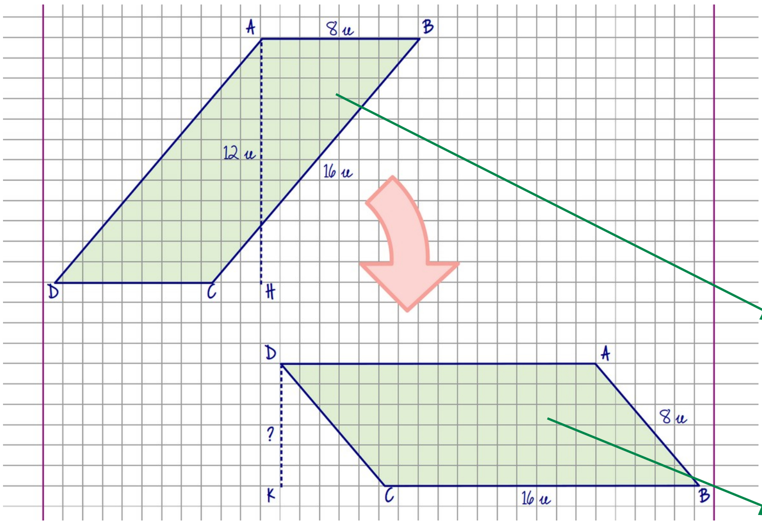
in questo caso si possono ridurre i termini dividendo numeratore e denominatore per 3.

PROBLEMA 6)

In un parallelogramma ABCD il lato AB misura 8 ***u***, il lato BC misura 16 ***u*** e l'altezza AH misura 12 ***u*** (AH è l'altezza relativa ad AB).

Determina la misura dell'altezza DK, relativa al lato BC.

(*NOTA BENE:* ***u*** *sono unità convenzionali*)



Commento al disegno

Nei parallelogrammi c'è un'altezza relativa al lato maggiore e un'altra altezza relativa al lato minore.

Il disegno non è richiesto in questo problema, tuttavia un disegno è utile a visualizzare i dati e ad indirizzarmi alla soluzione.

Questo problema assomiglia al precedente sul rombo per il fatto che anche nel parallelogramma l'area può essere determinata in due modi:

1) $\mathcal{A}_{parall} = AB \cdot AH$ se consideriamo *AB* come base (parallelogramma appoggiato sul lato corto)

2) $\mathcal{A}_{parall} = BC \cdot DK$ se consideriamo *BC* come base (parallelogramma appoggiato sul lato lungo)

DATI

$AB = 8\ \boldsymbol{u}$

$BC = 16\ \boldsymbol{u}$

$AH = 12\ \boldsymbol{u}$

$DK = ?$

SVOLGIMENTO

$$\mathcal{A}_{parall} = AB \cdot AH = 8 \cdot 12 = 96\ \boldsymbol{u}^2$$

$$DK = \frac{A_{parall}}{BC} = \frac{96}{16} = 6\,\boldsymbol{u}$$

Commento allo svolgimento

In questo problema sono necessari **due passaggi**:

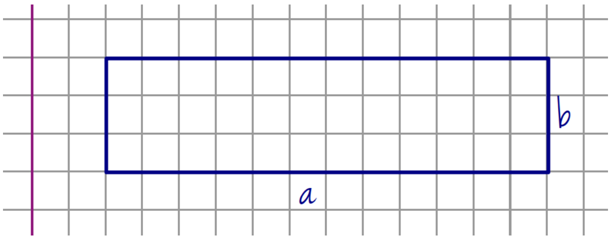
1) **applico** la prima formula direttamente **e calcolo** l'area considerando AB come base;

2) **applico** la seconda formula all'inverso **e calcolo** l'altezza considerando BC come base.

PROBLEMA 7)

L'area di una piazza rettangolare è 7744 m². Un lato della piazza è lungo 4 volte l'altro.

a) Disegna la figura.



Commento al disegno

Nel disegnare il rettangolo, l'unica condizione da rispettare è quella che il lato maggiore sia quattro volte il minore,

per esempio se il lato minore è lungo tre quadretti (***q***) allora il maggiore sarà 3·4 = 12 ***q***

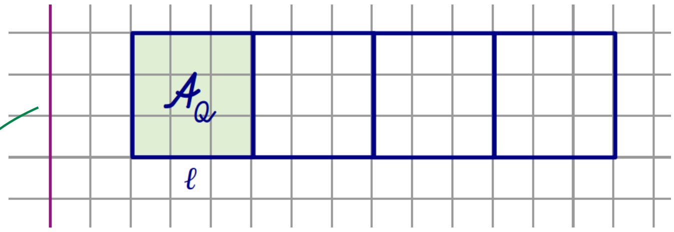
b) Calcola il perimetro della piazza.

DATI

$\mathcal{A}_{rettangolo} = 7744\ m^2$

$a = 4b$

SVOLGIMENTO



$\mathcal{A}_Q = 4\mathcal{A}_{rettangolo}$

$\mathcal{A}_Q = \dfrac{7744}{4} = 1936\,m^2$

$\ell = \sqrt{A_Q} = \sqrt{1936} = 44\,m$

$b = \ell = 44\,m$

$a = 4\ell = 44 \cdot 4 = 176\,m$

$p = 2(a+b) = 2\cdot(44+176) = 2\cdot 220 = 440\,m$

Commento allo svolgimento

Questo problema appartiene alla categoria dei problemi che si risolvono dividendo la figura in quadrati uguali

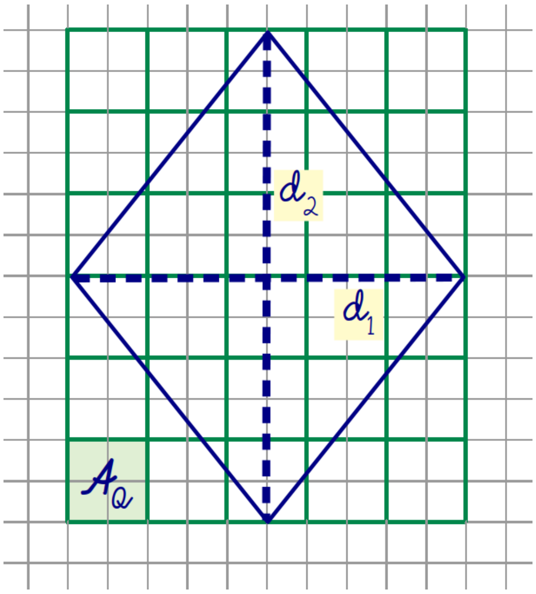
Si risolve in **4 passaggi**:

1) calcolo l'area di ciascuno dei 4 quadrati uguali in cui si può suddividere la figura
2) calcolo il lato ℓ del quadrato
3) calcolo le dimensioni ***a*** e ***b*** del rettangolo
4) calcolo il perimetro

PROBLEMA 8)

L'area di un rombo è 18,15 *ha* e una diagonale è i 5/6 dell'altra.

Calcola la misura delle diagonali.



Commento al disegno

Il disegno non è richiesto in questo problema, è comunque preferibile fare un disegno per visualizzare i dati e aiutarmi nella soluzione.

Nel rispettare la proporzione 5/6 ho preferito considerare una lunghezza delle diagonali di 12 ***q*** e 10 ***q*** perché le diagonali si incontrano a metà e i numeri pari facilitano l'uso della quadrettatura

Anche questo problema, come il precedente, appartiene alla categoria dei problemi che si risolvono dividendo la figura in quadrati uguali.

La differenza rispetto al problema precedente è che la figura non è un rettangolo ma un rombo.

L'area del rombo **è la metà** di quella del rettangolo in cui è inscritto.

DATI

$\mathcal{A}_{rombo} = 18{,}15\ ha$

$$d_1 = \frac{5}{6} d_2$$

Commento ai dati

ha è il simbolo dell'ettaro, un'unità di misura molto usata per indicare l'estensione dei terreni;

un ettaro è pari all'area di un quadrato di 100 *m* (1 *hm*) e quindi:

$$\mathbf{1\ ha \equiv 1\ hm^2}$$

SVOLGIMENTO

$$\mathcal{A}_{rettangolo} = 2\mathcal{A}_{rombo} = 2 \cdot 18{,}15 = 36{,}3\ ha$$

$$\mathcal{A}_Q = \mathcal{A}_{rettangolo} : 30 = \frac{36{,}3}{30} = 1{,}21\ ha$$

$$1{,}21\ ha \equiv 1{,}21\ hm^2 \equiv 121\ dam^2$$

$$\ell = \sqrt{A_Q} = \sqrt{121} = 11\ dam \equiv 110\ m$$

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= 110 \cdot 5 = 550\ m \\ d_2 &= 110 \cdot 6 = 660\ m \end{aligned}\right\}$$

Commento allo svolgimento

Si risolve in **4 passaggi**:

1) calcolo l'area del rettangolo che è il **doppio** di quella del rombo

2) calcolo l'area $\mathcal{A}_Q$ di ciascuno dei 30 quadrati uguali in cui si può suddividere la figura;

3) calcolo il lato ℓ del quadrato;

4) calcolo le diagonali d_1 e d_2 del rombo.